SESIÓN 12

DERIVADAS DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS (1ª. PARTE)

I. CONTENIDOS:

1. Definición de una función exponencial.
2. Una introducción al estudio del número "e", su importancia en el estudio de las matemáticas.
3. Una introducción al estudio de los logaritmos
4. Definición de una función logarítmica
5. Ejercicios resueltos aplicando exponentes y logaritmos (1ª. Parte)
6. Estrategias Centradas en el Aprendizaje: Ejercicios propuestos aplicando exponentes y logaritmos (1ª. Parte)

II. OBJETIVOS:

Al término de la Clase, el alumno:

- Comprenderá el concepto de función exponencial y logarítmica
- Entenderá la relación entre estas dos funciones
- Entenderá la importancia de este número trascendente
- Derivará funciones exponenciales y logarítmicas

III. PROBLEMATIZACIÓN:

Comenta las preguntas con tu Asesor y selecciona las ideas más significativas.

- ¿Cómo se representa gráficamente una función exponencial?
- ¿Cómo se representa gráficamente una función logarítmica?
- ¿De dónde surge el número "e"?

IV. TEXTO INFORMATIVO-FORMATIVO:

1.1. Definición de una función exponencial

Una función exponencial se puede definir como la función real $y = e^x$ en la cual e es una constante con valor aproximado:
$e = 2.71828$ hasta cinco cifras, conocido como número de Euler (matemático suizo 1707- 1783).

Esta función tiene por dominio el conjunto de los números reales $[-\infty, +\infty]$, y tiene una importantísima propiedad de que su derivada es la misma función.

Esta función se acostumbra escribirse como $y = e^x$, donde e es la base de los logarítmos naturales y corresponde a la función inversa del logaritmo natural.

2.1. Una introducción al estudio del número e

Jacob Bernoulli (matemático suizo 1654-1705), estudiando el problema acerca del llamado "interés compuesto" hizo este notable descubrimiento (el del número e).

Supongamos que usted tenga la fortuna de encontrar un banco en el cual invierte una unidad monetaria (que pueden ser dólares, euros, pesos, etc.) y le pague por su inversión el 100% de interés anual (El banco filantrópico de las hermanas de la caridad S.A.) pagando los intereses una vez al año, obviamente al finalizar el año usted tendría dos unidades monetarias (2 UM para abreviar). Pero si decidimos cobrar los intereses dos veces al año, es decir, cada seis meses entonces el tiempo se reduce ($\frac{1}{No..de\ periodos}$); de tal manera que el interés se divide entre dos, por lo que el interés que nos pagaría el banco es 1 UM multiplicada por 1.5 dos veces, así el cálculo quedaría de la siguiente forma: 1UM $\times$ $(1.5 \times 1.5) = 1$UM$\times$ $(1.5)^2 = 2.25$ UM.

Si por convenir a nuestros intereses deseamos que el banco nos pague trimestralmente los intereses, es decir, cuatro periodos en un año, siguiendo el mismo razonamiento obtendríamos
1UMx (1.5 X 1.5 X 1.5 x 1.5) =
1UMx $(1.25)^4$ = 2.4414

En caso de que decidiéramos cobrar nuestros intereses cada mes dicho monto sería 1UM$(1+\frac{1}{12})^{12} = 2.61303$
Esto quiere decir que cada vez que aumentamos la cantidad de periodos del pago de nuestros intereses en un factor n, el cual puede ser incluso igual al número de segundos que tiene un año, es decir, que el número de periodos podemos hacerlos tan grandes como nosotros queramos, la tasa de interés se reduce en cada periodo en un factor $\frac{1}{n}$, el total de unidades monetarias obtenidas se puede expresar con el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$$

Jacob Bernoulli demostró que se aproxima más al valor 2.718218………………….UM'S. De esta manera se llega a la definición que se da en cuestiones financieras al número e, la cual dice que este número es el "límite" de una inversión de una 1 UM con una tasa de interés del 100% anual compuesto en forma continua. Sin embargo esta constante aparece en otras formas cuando de realizan otro tipo de operaciones matemáticas, en seguida veremos algunas de ellas que son de nuestro interés.
Otra forma de llegar a este número, quizá la más conocida, es el valor límite de serie:

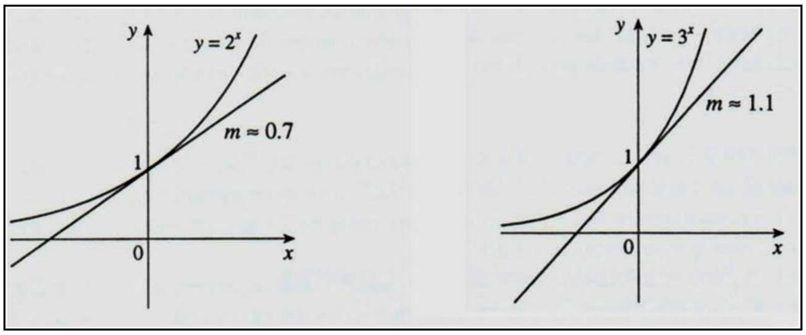
$$e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

La cual al ser desarrollada toma la forma:

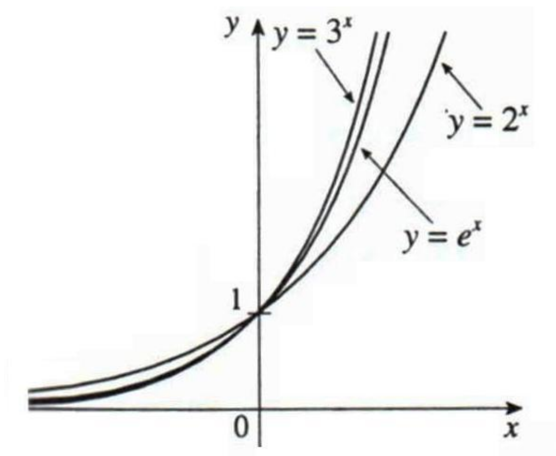
$$e = \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots$$

Otra forma en la cual aparece este número, y la más importante para nuestros propósitos, es la manera en la cual la gráfica de la ecuación $y = a^x$ intersecciona con eje de las abcisas (eje de las y), esto es importante para seleccionar una base a. En las siguientes dos gráficas se pueden ver las rectas tangentes a las curvas definidas por las ecuaciones $y = 2^x$ y $y = 3^x$ en el punto $(0,1)$. Si calculamos sus pendientes, veremos que $m = 0.7$ para la ecuación $y = 2^x$ y $m = 1.1$ para la ecuación $y = 3^x$

Fig. 1



Sin embargo algunas fórmulas del Cálculo Diferencial se pueden simplificar si pudiesen elegir una base de a de tal manera que la pendiente de la recta tangente a la gráfica descrita por la ecuación $y = a^x$ en el punto (0.1) sea exactamente igual a 1. Ese número existe y es para nuestra sorpresa! el número e ¡ Fig. 2



Si ponemos atención a las dos gráficas del principio, vemos que este número (e) se encuentra entre 2 y 3 y que la gráfica de la ecuación $y = e^x$ queda entre las gráficas de $y = 2^x$ y $y = 3^x$.

En general podemos resumir en una forma muy breve las siguientes particularidades de este número:

El número real e es irracional, es decir, un decimal no periódico y también trascendente que no es la raíz de una ecuación algebraica o polinómica de coeficientes racionales.

El hecho de que la función $y = e^x$ coincida con su derivada hace que la función exponencial se encuentre con frecuencia en el resultado de solución de muchas ecuaciones diferenciales aplicadas para solucionar problemas técnicos y científicos. Es por esto este número sirve para describir el comportamiento de ciertos fenómenos en campos como la electricidad, la electrónica, la mecánica, la física, la química, la biología, entre otros.

En seguida veremos la relación que hay entre las funciones exponenciales y logarítmicas.

3.1. Una introducción al estudio de los logaritmos

La invención del logaritmo: El creador de los logaritmos fue el profesor de matemáticas escocés John Napier (1550-1617), aunque su origen se remonta a Arquímedes, en la época de Napier los cálculos aplicados a la astronomía y a la navegación eran largos y engorrosos, se buscaba una técnica que hiciera esto más sencillo y rápido.

Se propusieron algunas soluciones, pero la solución que dio Napier era más práctica y sencilla además se podía resumir en una tabla lo que permitía hacer un cálculo con rapidez, su idea para este propósito se basó en la relación de una progresión aritmética (p.a) y una progresión geométrica (p.g), este concepto en su esencia es muy sencillo pero ingenioso, a continuación lo describiremos de una forma resumida.

Relacionando en una columna una p.a y una p.g tenemos la siguiente tabla.

p.a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p.g	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}

Tomando como base el número 2 y como su exponente los términos de la p.a, vemos que al elevar el número 2 a la potencia correspondiente de la p.a, nos resulta el número correspondiente a la p.g. Además podemos observar el siguiente hecho:

Supongamos que queremos multiplicar 4 x 8 = 32 podemos llegar al mismo resultado con solo sumar los exponentes de la base correspondiente de los factores 4 y 8, así:

$4 \times 8 = 2^2 \times 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 32$

$16 \times 64 = 2^4 \times 2^6 = 2^{4+6} = 2^{10} = 1024$

Como se puede ver el cálculo para efectuar una multiplicación se reduce a una simple suma de exponentes.

Así mismo si queremos calcular una división esto se reduce a una resta de exponentes, veamos los siguientes ejemplos:

Dividamos $32 \div 4 = 8$ y $1024 \div 64 = 16$ llegamos a estos resultados después de realizar las operaciones aritméticas correspondientes, ahora hagámoslas mediante el método de los exponentes:

$32 \div 4 = 2^5 \div 2^2 = 2^{5-2} = 2^3 = 8$ en forma análoga $1024 \div 64 = 2^{10} \div 2^6 = 2^{10-6} = 2^4 = 16$

Así podemos ver que para efectuar una división se reduce a una resta de exponentes

En general esto es extensivo para otro tipo de operaciones como extraer raíces o elevar una base a una potencia o ejecutar operaciones combinadas.

Por esta razón la etimología de la palabra *logaritmo* **significa número que indica una proporción o relación**, esto quiere decir la manera en que una p. a se relaciona con una p. g
En la práctica se emplean dos bases de logaritmos, la base 10, llamados logaritmos decimales, vulgares o comunes y la base e llamados logarítmos naturales o neperianos, esto es solo por conveniencia, pero se puede emplear cualquier base que sea diferente de cero y uno. En las ciencias donde se aplican ampliamente las matemáticas como la química (medida del pH ,en física para medir fenómenos como la luminosidad, el sonido, la energía de un terremoto, etc.), es común emplear la base 10, en informática se usa comúnmente el logaritmo de base 2.

Definición de logaritmo. Matemáticamente el logaritmo de un número en una base determinada es el exponente al cual hay que elevar la base para obtener dicho número. Así por ejemplo el logaritmo en base 10 de 100 es 2, ya que 100 es igual a 10 elevado a la potencia 2, de aquí podemos ver claramente ahora que así como la operación de suma es inversa a la resta y la multiplicación es inversa a la división, la logaritmación es la operación inversa a la exponenciación.

De lo anterior podemos deducir el concepto de lo que es un logaritmo.

Dado un número real, la función logaritmo le asigna el exponente "n" o potencia a la que un número fijo llamado base (digamos "b") se ha de elevar para obtener dicho número real. Es la función inversa a la exponencial $b^n = x$. Dicha función se escribe como $\log_b x = n$ por lo que podemos escribir estas dos funciones como:

$$\log_b x = n \quad \leftrightarrow \quad b^x = x$$

Esto se lee como logaritmo en base "b" de "x" es igual a "n" , si y solo si "b" elevada a la "n" da por resultado a "x" .

Ahora debemos entender claramente porque decimos que estas funciones son inversas.

4.1. Definición de una función logarítmica:

Si $a > 0$ y $a \neq 1$ la función expomencial $y = f(x) = a^x$ crece o decrece y, por lo tanto, es biunívoca, es decir, uno a uno.

Por consecuencia, tiene una función inversa f^{-1} la que se define como **función logarítmica con base a** y se usa la notación $\log_a x = y$ para simbolizarla. Si empleamos la fórmula de función inversa esto nos queda como sigue:

$$f^{-1}x = y \quad \leftrightarrow \quad f(y) = x$$

Entonces tendríamos:

$$\log_a x = y \quad \leftrightarrow \quad a^y = x$$

Para que nos quede claro lo expuesto anteriormente, nótese que la dos ecuaciones de la definición anterior son equivalentes, el estudiante debe adquirir destreza para hacer la conversión de una forma a otra, puede auxiliarse del siguiente diagrama para tal fin.

Exponente

$$\log_a x = y \qquad\qquad a^y = x$$

Base

Podemos observar que cuando se cambian las formas la base de la forma logarítmica y exponencial son las mismas y $\log_a x$ ***es el exponente al que hay que elevar la base para poder obtener*** $\boldsymbol{x}$***.***

La función logarítmica $\log_a x$ tiene por dominio $(0, \infty)$ y por rango el conjunto de los reales, su gráfica es la reflexión de la gráfica de $y = a^x$ respecto a la recta $y = x$.

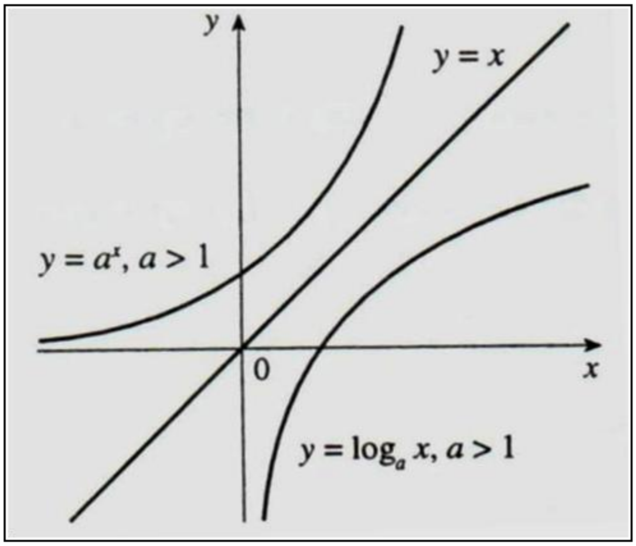


Fig. 3

Las operaciones siguen ciertas leyes, a continuación se exponen las más importantes.

Leyes de los logaritmos: Siendo x y y números positivos:

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

2. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

3. $\log_a(x^n) = n\log_a x$ (donde n es cualquier número real)

Logaritmos naturales:

De todas las bases a para los logaritmos la elección más conveniente para este fin es el número e, el cual se conoce como logarítmo natural ya definido anteriormente, el cual tiene una notación especial.

$$\log_e x = \ln x$$

Por lo que podemos establecer las siguientes propiedades de definición de logaritmos natural:

$\ln x = y \quad \leftrightarrow \quad e^y = x$

$\ln(e^x) = x$ siendo x un número real

$e^{\ln x} = x$ para toda $x > 0$

Y en particular si $x = 1$, se tiene: $\ln e = 1$

5.1. Ejercicios resueltos aplicando exponentes y logaritmos: (1ª. Parte)

1. Escriba las siguientes formas exponenciales en logarítmicas:

a) $p^q = r$ b) $2^3 = 8$ c) $4^2 = 16$ d) $3^{-2} = \frac{1}{9}$ e) $8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{4}$

Solución:

a) $\log_p r = q$ b) $\log_2 8 = 3$ c) $\log_4 16 = 2$ d) $\log_3 \frac{1}{9} = -2$ e) $\log_8 \frac{1}{4} = -\frac{2}{3}$

2. Escriba las siguientes formas logarítmicas en exponenciales:

a) $\log_5 25 = 2$ b) $\log_2 64 = 8$ c) $\log_{1/4} {}^1/_{16} = 2$ d) $\log_a a^3 = 3$ e) $\log_r 1 = 0$

Solución:

a) $5^2 = 25$ b) $8^2 = 64$ c) $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$ d) $a^3 = a^3$ e) $r^0 = 1$

Para poder solucionar ecuaciones donde intervienen logaritmos, es conveniente entender los siguientes dos teoremas que son consecuencia de que las funciones logarítmicas son biunívocas.

1. Si $x_1 \neq x_2$, entonces $\log_a x_1 \neq \log_a x_2$
2. SI $x_1 = x_2$, entonces $\log_a x_2 = \log_a x_2$

6.1. ESTRATEGIAS CENTRADAS EN EL APRENDIZAJE: Ejercicios propuestos aplicando exponentes y logaritmos (1ª. Parte)

a) Escriba en forma logarítmica

1) $4^3 = 64$ 2) $4^{-3} = \frac{1}{64}$ 3) $t^r = s$ 4) $3^x = 4 - t$ 5) $5^{7t} = \frac{a+b}{a}$ 6) $(0.7)^t = 5.3$

7) $3^{-4} = \frac{1}{81}$ 8) $3^{-2x} = \frac{p}{f}$ 9) $c^p = d$ 10) $(0.9)^t = \frac{1}{2}$

b) Escriba en forma exponencial

1) $\log_2 32 = 5$ 2) $\log_3 \frac{1}{243} = -5$ 3) $\log_t r = p$ 4) $\log_3(x+2) = 5$ 5) $\log_2 m = 3x + 4$

6) $\log_b 512 = \frac{3}{2}$ 7) $\log_4 \frac{1}{256} = -4$ 8) $\log_6(2x-1) = 3$ 9) $\log_4 p = 5 - x$ 10) $\log_a 343 = \frac{3}{4}$